局所コンパクトの定義といくつかの反例

uni

2017 年 2 月 12 日

局所コンパクトの定義は文献ごとに異なることがある．本稿ではそれら定義の関係について調べる．

定義 1. 位相空間 X について以下の 3 条件をそれぞれ (LC1), (LC2), (LC3) とよぶ:

- (LC1) X の各点はコンパクト近傍をもつ．
- (LC2) X の各点はコンパクトな閉近傍をもつ．
- (LC3) X の任意の点 x と, x の任意の近傍 U に対し, $x \in V \subset U$ をみたすコンパクト近傍 V が存在する． ◇

上のいずれかの条件を用いて局所コンパクトが定義されることが多いように思われる．しかし, これらは一般の位相空間においては同値ではない．反例を挙げながら関係をみていく．ただしあとで示すように, ハウスドルフ空間においては同値である．

まず, (LC2) あるいは (LC3) から (LC1) が導かれることは定義から明らかである．そこで, それぞれの条件をみたすか否かにより, 次のような 5 つの場合分け (P1)–(P5) が考えられる:

	(LC1)	(LC2)	(LC3)
(P1)	✓	✓	✓
(P2)	✓	✓	✗
(P3)	✓	✗	✓
(P4)	✓	✗	✗
(P5)	✗	✗	✗

実際にそれぞれの場合に対し, 該当する位相空間が存在する．

(P1) $\mathbb{R}$

実数空間 $\mathbb{R}$ が (LC1)–(LC3) を全てみたす．

(P3) Particular Point Topology

X を無限集合とする．1 点 $p \in X$ をひとつ固定する．ここで X の部分集合 U が開であることを, $U = \emptyset$ あるいは $p \in U$ であるとして定める．この定義が開集合系の公理をみたすことはすぐ確かめられる．任意の点 $x \in X$ について 2 点集合 $\{x, p\}$ は x のコンパクト近傍であるから (LC1) が成立する．また, この近傍は x の最小の近傍である．よって (LC3) が成立する．一方, 点 p はコンパクトな閉近傍をもたない．なぜなら, p を含む閉集合は X のみであり, X はコンパクトではないからである ($\because$ X の開被覆 $(\{x, p\} \mid x \in X)$ を考えればよい)．ゆえに (LC2) はみたされない．

(P5) $\mathbb{Q}$

有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ を $\mathbb{R}$ の部分空間と見做す．位相空間 $\mathbb{Q}$ の基本的な性質として次がある．

補題 2. a, b を実数とする．このとき $a < b$ ならば区間 $(a, b) = \{x \in \mathbb{Q} \mid a < x < b\}$ はコンパクトではない． $\diamond$

証明. a に収束する減少有理数列 $a_0 > a_1 > \cdots$ をひとつとる．同じく, b に収束する増加有理数列 $b_0 < b_1 < \cdots$ をひとつとる．すると, 開集合の族 $((a_n, b_n) \mid n \in \mathbb{N})$ は (a, b) の開被覆であるが, その内の有限個の族では (a, b) を被覆できない．よって (a, b) はコンパクトではない． $\square$

とくに, a, b を無理数とすれば, 区間 (a, b) は閉集合であるがコンパクトではない．このことを用いれば, $\mathbb{Q}$ のどんな点もコンパクト近傍をもたないことが次のようにして分かる: もし仮に, 1 点 $p \in \mathbb{Q}$ のコンパクト近傍 V が存在したとする．無理数 a, b を十分小さくとれば $p \in (a, b) \subset V$ となる．(a, b) は $\mathbb{Q}$ において閉であるから, よって V においても閉である．すると (a, b) がコンパクトになってしまい矛盾する．

これより, $\mathbb{Q}$ は (LC1)–(LC3) のどの条件もみたさない．

次の補題はあとで使う．

補題 3. A を $\mathbb{Q}$ の部分空間で, その補集合 $\complement A = \mathbb{Q} \setminus A$ がコンパクトとなるものとする．このとき, A の閉包 $\operatorname{Cl} A$ は $\mathbb{Q}$ に等しい． $\diamond$

証明. $\mathbb{Q}$ のどんな点もコンパクト近傍をもたないので, $\complement A$ の内部 $\operatorname{Int} \complement A$ は空である．よって $\operatorname{Cl} A = \complement \left(\operatorname{Int} \complement A\right) = \mathbb{Q}$ である． $\square$

(P2) $\mathbb{Q}^*$

まず次の操作を導入する．この操作は一点コンパクト化, Alexandroff のコンパクト化などとよばれる．

命題 4. X を位相空間, X に新しい元 ∞(無限遠点とよぶ) を追加した集合を $X^* := X \cup \{\infty\}$ とする．X^* の開集合は次の形をした部分集合として定める:

$$\begin{cases} U & (U \text{ は } X \text{ の開集合}) \\ U \cup \{\infty\} & (U \text{ は } X \text{ の開集合で}, X \setminus U \text{ がコンパクトであるもの}) \end{cases}$$

この定義が開集合系の公理をみたすことはすぐ確かめられる．基本的な性質として以下のものがある．

(1) X は X^* の開集合である．また, X の元々の位相は, X を X^* の部分空間と見做したときの位相と等しい．

(2) X^* はコンパクトである．

(3) X^* がハウスドルフとなるための必要十分条件は, X がハウスドルフかつ (LC2) をみたすことである．

(4) X がコンパクトではないことと, X が X^* にて稠密であることは同値である．　$\diamond$

証明. (1) 定義より明らか．

(2) X^* の開被覆 $(U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ を任意にとる．この開被覆の中から ∞ を含むものをひとつとり, それを U_{λ_∞} とする．$(X \cap U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ は X の開被覆であり, $X^* \setminus U_{\lambda_\infty} \subset X$ はコンパクト部分空間なので, 有限個の $U_{\lambda_0}, U_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_n}$ が存在して $X^* \setminus U_{\lambda_\infty} \subset U_{\lambda_0} \cup U_{\lambda_1} \cup \cdots U_{\lambda_n}$ となる．よって, X^* は $U_{\lambda_0}, U_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_n}, U_{\lambda_\infty}$ によって被覆される．

(3) X^* がハウスドルフであるとする．X は X^* の部分空間なのでハウスドルフである．また, X^* はコンパクトハウスドルフ空間であるから正則空間である．よって任意の $x \in X$ に対し, $x \in U \subset X$ となる閉近傍 U が存在する．この U が X における x のコンパクト閉近傍になっている．次に逆を示す．X^* の相異なる任意の 2 点 x, y をとる．$x, y \in X$ なら明らか．そこで $y = \infty$ とする．x の X におけるコンパクト閉近傍 U をとると, $X^* \setminus U$ は ∞ の開近傍である．よって X^* はハウスドルフ空間である．

(4) X がコンパクトではないとする．稠密性を示すためには, ∞ の任意の開近傍 U が X と交わることが分かればよい．$X^* \setminus U$ は X において閉かつコンパクトである．X はコンパクトではないので, ある $p \in X$ が存在して $p \notin X^* \setminus U$ となる．すると $p \in X \cap U$ である．次に X がコンパクトであるとしよう．すると, 一点集合 $\{\infty\}$ が X^* の開集合であるから, X は X^* において稠密ではない．　$\square$

さて, ここで $\mathbb{Q}^*$ を考えよう. $\mathbb{Q}^*$ 自身がコンパクトなので (LC1), (LC2) がみたされる. 一方, 1 点 $p \in \mathbb{Q}$ をとると, $\mathbb{Q}$ が p の近傍であるが, $\mathbb{Q}$ より小さい p の近傍でコンパクトになるものは存在しない. よって (LC3) は不成立である.

(P4) $\mathbb{Q}^\sharp$

前の例は無限遠点をひとつ追加することにより得られた. 今度は無限遠点を無限個付け足す. 正確には以下の通り. X を位相空間とする. X に可算無限個の相異なる新しい元 $\infty_0, \infty_1, \ldots$ を足した集合 $X^\sharp := X \cup \{\infty_0, \infty_1, \ldots\}$ を考える. 次の形をした部分集合全体を $\mathcal{B}$ とする: $i \in \mathbb{N}$ として

$$\begin{cases} U & (U \text{ は } X \text{ の開集合}) \\ U \cup \{\infty_i\} & (U \text{ は } X \text{ の開集合で}, X \setminus U \text{ がコンパクトであるもの}) \end{cases}$$

そこで, $\mathcal{B}$ から生成される位相を $X^\sharp$ に入れる.

$X^\sharp$ の性質を調べていこう. 命題 4 の証明と同様にするなどして以下のことが分かる:

- $X_i^* := X \cup \{\infty_i\}$ は $X^\sharp$ の開集合である. X も $X^\sharp$ の開集合である.
- X の元々の位相は, $X^\sharp$ の部分空間と見做したときの位相と等しい.
- X_i^* を X の一点コンパクト化と見做したときの位相は, $X^\sharp$ の部分空間と見做したときの位相と等しい. よって X_i^* はコンパクトである.
- X がコンパクトではないとき, X は $X^\sharp$ において稠密である.
- $X^\sharp$ はコンパクトではない ($\because$ 開被覆 $(X_i^* \mid i \in \mathbb{N})$ を考えればよい).

準備ができたので位相空間 $\mathbb{Q}^\sharp$ に焦点を絞る. $\mathbb{Q}^\sharp$ の各点はある $\mathbb{Q}_i^*$ に含まれるので (LC1) が成り立つ. (P2) のときと同様, (LC3) はみたされない. 次に, 点 ∞_0 の閉近傍 W を任意のとる. このとき, $\mathbb{Q}$ の開集合 U で, $\mathbb{Q} \setminus U$ がコンパクトであり, $U \cup \{\infty_0\} \subset W$ となるものが存在する. 補題 3 より $\mathbb{Q} = \mathrm{Cl}_{\mathbb{Q}} U$ である.[*1] これより $\mathbb{Q} = \mathrm{Cl}_{\mathbb{Q}} U = \mathbb{Q} \cap \mathrm{Cl}_{\mathbb{Q}^\sharp} U$ となるので, $\mathbb{Q} \subset \mathrm{Cl}_{\mathbb{Q}^\sharp} U$ である. W は閉集合であるから $\mathbb{Q} \subset W$ となる. ゆえに $\mathbb{Q}$ の $\mathbb{Q}^\sharp$ における稠密性より, $\mathbb{Q}^\sharp = W$ である. これはコンパクトではない. 以上より (LC2) は不成立である.

ハウスドルフ空間における同値性

これまで見てきたように, 条件 (LC1)–(LC3) は明らかな場合を除いて独立である. だが, ハウスドルフ空間においては, これらの条件は同値である.

定理 5. X をハウスドルフ空間とする. このとき, 条件 (LC1)–(LC3) は同値である. $\diamond$

[*1] 記号 $\mathrm{Cl}_X Y$ で, 位相空間 X における部分集合 $Y \subset X$ の閉包を表わす.

証明. (LC3) $\Rightarrow$ (LC2): X の各点に対し, 少なくとも 1 つコンパクト近傍 V が存在する. X はハウスドルフ空間であるから, V は X の閉集合である.

(LC2) $\Rightarrow$ (LC1): 明らか.

(LC1) $\Rightarrow$ (LC3): 点 $x \in X$ とその近傍 U を任意にとる. x のコンパクト近傍が存在するので, そのひとつを C とおく. すると $U' = \mathrm{Int}\,(C \cap U)$ とおけば, U' は x の開近傍である. C はコンパクトハウスドルフ空間であるから正則空間でもある. よって C において, x の開近傍である U' に対し, $x \in V \subset U'$ となるような x の閉近傍 V が存在する. C がコンパクトなので V もコンパクトである. また, V は X においても x の近傍である. したがって V が所望の近傍である. $\square$

参考文献

[1] 森田紀一, 『位相空間論』, 岩波書店, 1981

[2] T. Wedhorn, *Manifolds, Sheaves, and Cohomology*, Springer Fachmedien Wiesbaden, 2016